

Partie A

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.

f est continue et dérivable sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, \infty[$.

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

2.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ et } P(0) = f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$$

$$P(1) = f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b + c = -\frac{1}{2}$$

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ et } P'(0) = f'(0) = -1 \Rightarrow c = -1$$

$$P'(1) = f'(1) = -\frac{1}{4} \Rightarrow 3a + 2b - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$\text{donc } \begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ 3a + 2b - 1 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$3a + 2(\frac{1}{2} - a) = \frac{3}{4}$$

$$\text{soit } a = -\frac{1}{4} \text{ et } b = \frac{3}{4}$$

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x + 1$$

3.

$$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1$$

$$k(x) = \frac{1 + \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2)(x+1) + (x^2 - 1)}{1+x}$$

$$k(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{4}x^2(x-3)(x+1)}{1+x}$$

$$k(x) = \frac{x^2(1 + \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3))}{1+x}$$

$$k(x) = \frac{x^2(\frac{1}{4}(1+x^2-2x))}{1+x}$$

$$k(x) = \frac{\frac{1}{4}x^2(x-1)^2}{1+x}$$

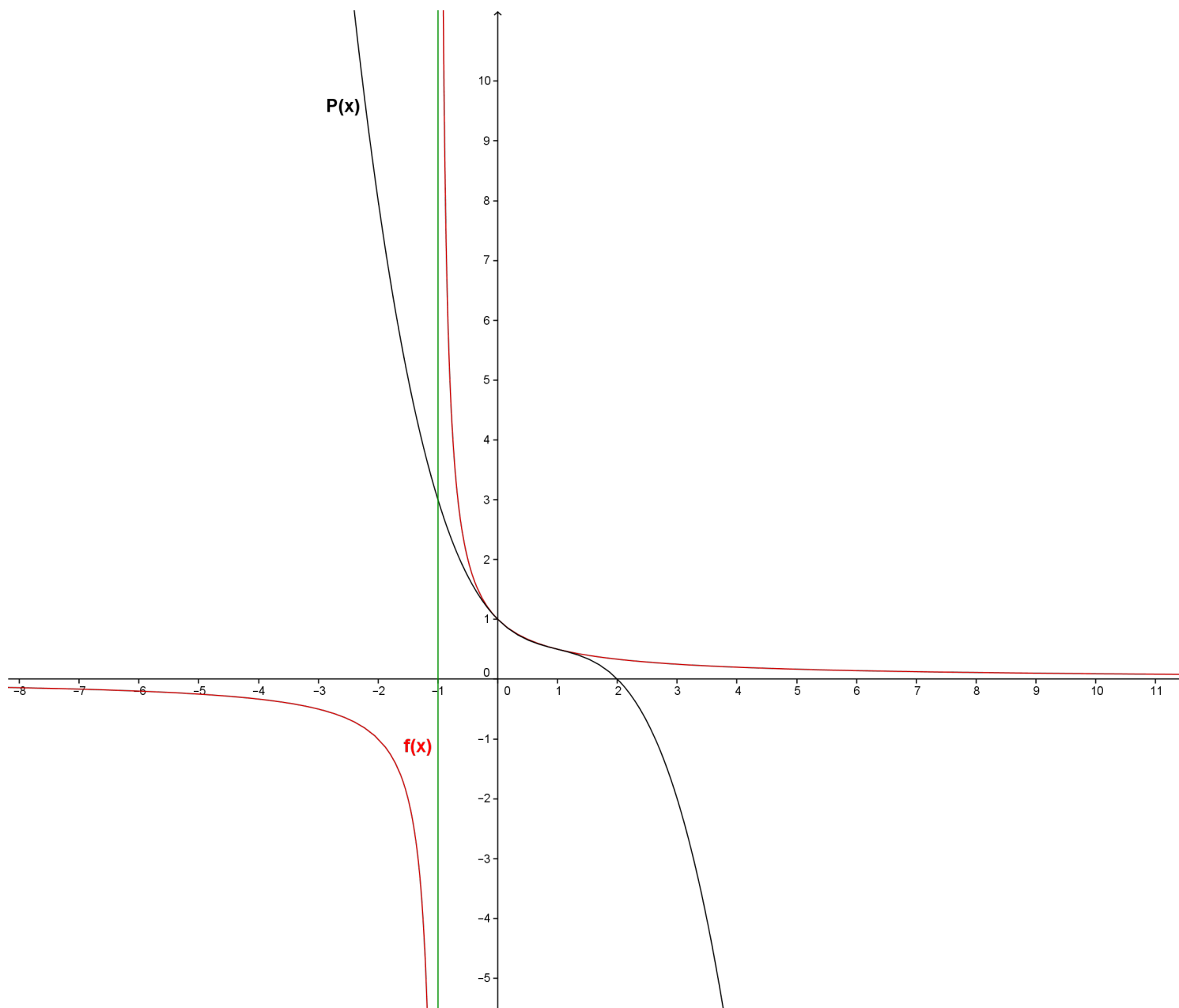
$$\text{or } k(x) = f(x) - P(x)$$

$$\text{donc si } x > -1 \Rightarrow f(x) > P(x)$$

$$\text{si } x < -1 \Rightarrow f(x) < P(x)$$

$$\text{de plus } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$



4.

$$k(x) = \frac{1}{4} \frac{x^2(x-1)^2}{1+x}$$

$$x \in [0, 1] \text{ donc } x+1 > 1 \text{ et } \frac{1}{x+1} < 1$$

$$k(x) < \frac{1}{4} x^2 (x-1)^2$$

$$\text{donc } \int_0^1 k(x) dx < \int_0^1 \frac{1}{4} x^2 (x-1)^2 = \frac{1}{4} \int_0^1 (x^2(x^2 - 2x + 1)) dx$$

$$\text{donc } \int_0^1 k(x) dx < \int_0^1 \frac{1}{4} (x^4 - 2x^3 + x^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$\text{donc } \int_0^1 k(x) dx < \frac{1}{20} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{1}{120}$$

$$x \in [0, 1] \text{ donc } x+1 < 2 \text{ et } \frac{1}{x+1} > \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \int_0^1 k(x)dx \succ \int_0^1 \frac{1}{8}(x^4 - 2x^3 + x^2) = \frac{1}{240}$$

5.

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$$

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x + 1\right)dx$$

$$\int_0^1 P(x)dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{16}$$

$$\text{donc } \int_0^1 k(x)dx = \int_0^1 (f(x) - P(x))dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 P(x)dx = \ln 2 - \frac{11}{16}$$

6.

$$\frac{1}{240} \prec \int_0^1 k(x)dx \prec \frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{240} \prec \int_0^1 \ln 2 - \frac{11}{16} \prec \frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{240} + \frac{11}{16} \prec \ln 2 \prec \frac{1}{120} + \frac{11}{16}$$

$$\frac{11 \times 15 + 1}{240} \prec \ln 2 \prec \frac{11 \times 15 + 2}{240}$$

$$\text{donc } \frac{n}{240} \prec \ln 2 \prec \frac{n+1}{240} \text{ avec } n = 166$$

Partie B

Q application de E dans $\mathbb{R}^4$ telle que $Q(P) = (P(0), P'(0), P(h), P'(h))$

1.

E contient les fonctions polynomes de degré inférieur ou égal à 3 donc $\dim E=4$

Soit A et B $\in E$, alors $(P + \lambda Q)(x) = P(x) + \lambda Q(x)$ donc

$$Q(A + \lambda B) = (A(0) + \lambda B(0), A'(0) + \lambda B'(0), A(h) + \lambda B(h), A'(h) + \lambda B'(h))$$

$$= (A(0), A'(0), A(h), A'(h)) + \lambda(B(0), B'(0), B(h), B'(h))$$

donc $Q(A + \lambda B) = Q(A) + \lambda Q(B)$ donc Q est une application linéaire.

Montrons que Q est injective :

$$\text{soit } P \in E \text{ alors } P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$P(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$P'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$P(h) = 0 \Rightarrow ah^3 + bh^2 = 0$$

$$P'(h) = 0 \Rightarrow 3ah^2 + 2bh = 0$$

Soit pour $h > 0$:

$$\begin{cases} ah + b = 0 \\ 3ah + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -ah \\ ah = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $Q(P) = 0 \Rightarrow P = 0$. Le noyau de Q ne contient que la fonction nulle donc Q est injective.
or $\dim E=4=\dim \mathbb{R}^4$ il en résulte que Q est une application linéaire bijective.

2.

$$P_3 = Q^{-1}(0, 0, 1, 0)$$

$$P(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$P'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$P(h) = 1 \Rightarrow ah^3 + bh^2 = 1$$

$$P'(h) = 0 \Rightarrow 3ah^2 + 2bh = 0$$

Soit pour $h > 0$:

$$\begin{cases} ah^3 + bh^2 = 1 \\ 3ah + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ah^3 - \frac{3}{2}ah^3 = 1 \\ b = -\frac{3}{2}ah \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{h^3} \\ b = \frac{3}{h^2} \end{cases}$$

$$P_3(x) = -\frac{2}{h^3}x^3 + \frac{3}{h^2}x^2$$

$$P_4 = Q^{-1}(0, 0, 0, 1)$$

$$P(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$P'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$P(h) = 0 \Rightarrow ah^3 + bh^2 = 0$$

$$P'(h) = 1 \Rightarrow 3ah^2 + 2bh = 1$$

Soit pour $h > 0$:

$$\begin{cases} ah + b = 0 \\ 3ah^2 + 2bh = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -ah \\ ah^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{h^2} \\ b = -\frac{1}{h} \end{cases}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{h^2}x^3 - \frac{1}{h}x^2$$

3.

$$P_1 = 1 - P_3$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{2}{h^3}x^3 - \frac{3}{h^2}x^2$$

$$P_1(0) = 1$$

$$P'_1(0) = 0$$

$$P_1(h) = 0$$

$$P_1'(h) = 0$$

$$\text{donc } P_1 = Q^{-1}(1, 0, 0, 0)$$

$$P_2(x) = P_4(h - x)$$

$$P_2(x) = -\left(\frac{1}{h^2}(h - x)^3 - \frac{1}{h}(h - x)^2\right)$$

$$= -\left((h - x)^2\left(\frac{1}{h^2}(h - x) - \frac{1}{h}\right)\right) = -\left((h - x)^2\left(-\frac{x}{h^2}\right)\right)$$

$$P_2(x) = \frac{x(h-x)^2}{h^2}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{h^2}x^3 - \frac{2}{h}x^2 + x$$

$$P_2'(x) = \frac{3}{h^2}x^2 - \frac{4}{h}x + 1$$

$$P_2(0) = 0$$

$$P_2'(0) = 1$$

$$P(h) = 0$$

$$P'(h) = 0$$

$$\text{donc } P_2 = Q^{-1}(0, 1, 0, 0)$$

4.

$$\int_0^h P_1(t)dt = \int_0^h \left(1 + \frac{2}{h^3}t^3 - \frac{3}{h^3}t^2\right)dt =$$

$$h + \frac{2}{h^3}\left(\frac{h^4}{4}\right) - \frac{3}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right)$$

$$\int_0^h P_1(t)dt = \frac{1}{2}h$$

$$\int_0^h P_2(t)dt = \frac{1}{h^2} \int_0^h (t(h^2 - 2ht + t^2))dt =$$

$$= \frac{1}{h^2} \int_0^h (h^2t - 2ht^2 + t^3)dt = \frac{1}{h^2} \left(\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4}\right)$$

$$= \frac{3h^2}{4} - \frac{2h^2}{3}$$

$$\int_0^h P_2(t)dt = \frac{h^2}{12}$$

$$\int_0^h P_3(t)dt = \int_0^h \left(-\frac{2}{h^3}t^3 + \frac{3}{h^2}t^2\right)dt =$$

$$= -\frac{h}{2} + h$$

$$\int_0^h P_3(t)dt = \frac{1}{2}h$$

$$\int_0^h P_4(t)dt = \int_0^h \left(\frac{1}{h^2}t^3 - \frac{1}{h}t^2\right)dt =$$

$$= \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{3}$$

$$\int_0^h P_4(t)dt = -\frac{h^2}{12}$$

5.

Montrons que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une famille libre de E :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + x(\lambda_2) + x^2(-3\frac{\lambda_1}{h^2} - 2\frac{\lambda_2}{h} + 3\frac{\lambda_3}{h^2} - \frac{\lambda_4}{h}) + x^3(2\frac{\lambda_1}{h^3} + \frac{\lambda_2}{h^2} - 2\frac{\lambda_3}{h^3} + \frac{\lambda_4}{h^2}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ et } \begin{cases} 3\frac{\lambda_3}{h} = \lambda_4 \\ 2\frac{\lambda_3}{h} = \lambda_4 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

(P_1, P_2, P_3, P_4) est une famille libre de 4 vecteurs dans l'espace vectoriel E de dimension 4, c'est donc une base de E .

Il en résulte que tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3, P_4 .

$$\text{Soit } P(x) = \alpha P_1(x) + \beta P_2(x) + \gamma P_3(x) + \zeta P_4(x)$$

$$P(0) = \alpha$$

$$P'(0) = \beta$$

$$P(h) = \gamma$$

$$P'(h) = \zeta$$

Donc :

$$P(x) = P(0)P_1(x) + P'(0)P_2(x) + P(h)P_3(x) + P'(h)P_4(x)$$

$$\int_0^h P(t)dt = P(0) \int_0^h P_1(t)dt + P'(0) \int_0^h P_2(t)dt + P(h) \int_0^h P_3(t)dt + P'(h) \int_0^h P_4(t)dt$$

$$\int_0^h P(t)dt = P(0)\frac{h}{2} + P'(0)\frac{h^2}{12} + P(h)\frac{h}{2} - P'(h)\frac{h^2}{12}$$

$$\int_0^h P(t)dt = \frac{h}{2}(P(0) + P(h)) + \frac{h^2}{12}(P'(0) - P'(h))$$

Partie C

1.

g est dérivable sur $[0, h]$ donc g est continue et donc intégrable sur $[0, h]$.

$Q_h \in E$ donc D'après 5/ on a :

$$\int_0^h g(t)dt - \int_0^h Q_h(t)dt = \int_0^h g(t)dt - \frac{h}{2}(Q_h(0) + Q_h(h)) - \frac{h^2}{12}(Q'_h(0) - Q'_h(h))$$

$$\text{or } Q_h(0) = g(0) \quad Q_h(h) = g(h) \quad Q'_h(0) = g'(0) \quad Q'_h(h) = g'(h)$$

$$\int_0^h g(t)dt - \int_0^h Q_h(t)dt = \int_0^h g(t)dt - \frac{h}{2}(g(0) + g(h)) - \frac{h^2}{12}(g'(0) - g'(h))$$

2.

Pour $u \in [0, a]$

$$\psi(u) = \int_0^u g(t)dt - \frac{u}{2}(g(0) + g(u)) - \frac{u^2}{12}(g'(0) - g'(u))$$

g est dérivable sur $[0, a]$ au moins jusqu'à l'ordre 4 donc ψ fonction de g et g' est dérivable sur $[0, a]$ au moins jusqu'à l'ordre 3.

$$\psi(0) = \int_0^0 g(t)dt = 0$$

$$\psi'(u) = g(u) - \frac{1}{2}(g(0) + g(u)) - \frac{u}{2}g'(u) - \frac{2u}{12}(g'(0) - g'(u)) + \frac{u^2}{12}g''(u)$$

$$\psi'(u) = \frac{1}{2}(g(u) - g(0)) - \frac{1}{3}ug'(u) - \frac{1}{6}ug'(0) + \frac{u^2}{12}g''(u)$$

$$\psi'(0) = 0$$

$$\psi''(u) = \frac{1}{2}g'(u) - \frac{1}{3}g'(u) - \frac{1}{3}ug''(u) - \frac{1}{6}g'(0) + \frac{1}{6}ug''(u) + \frac{u^2}{12}g^3(u)$$

$$\psi''(u) = \frac{1}{6}g'(u) - \frac{1}{6}ug''(u) - \frac{1}{6}g'(0) + \frac{u^2}{12}g^3(u)$$

$$\psi''(0) = 0$$

$$\psi^3(u) = \frac{1}{6}g''(u) - \frac{1}{6}g''(u) - \frac{1}{6}ug^3(u) + \frac{1}{6}ug^3(u) + \frac{u^2}{12}g^4(u)$$

$$\psi^3(u) = \frac{u^2}{12}g^4(u)$$

3.

$$M = \sup_{t \in [0, a]} |g^4(t)|.$$

$$\psi^3(t) = \frac{t^2}{12}g^4(t)$$

$$\text{or } |g^4(t)| \leq M \text{ pour } t \in [0, a]$$

$$\text{donc pour } x \in [0, a]$$

$$\int_0^x |\psi^3(t)|dt = \int_0^x \frac{t^2}{12}|g^4(t)|dt \leq M \int_0^x \frac{t^2}{12}dt$$

$$\text{donc } |\int_0^x \psi^3(t)dt| \leq M \int_0^x \frac{t^2}{12}dt$$

$$\text{donc } |\psi''(x) - \psi''(0)| \leq M \int_0^x \frac{t^2}{12}dt \quad \text{or } \psi''(0) = 0$$

$$\forall x \in [0, a] \quad |\psi''(x)| \leq M \frac{x^3}{36}$$

$$\text{pour } y \in [0, a]$$

$$\int_0^y |\psi''(t)|dt \leq M \int_0^y \frac{t^3}{36}dt$$

$$\text{donc } |\int_0^y \psi''(t)dt| \leq M \int_0^y \frac{t^3}{36}dt$$

$$\text{donc } |\psi'(y) - \psi'(0)| \leq M \frac{y^4}{144} \quad \text{or } \psi'(0) = 0$$

$$\forall y \in [0, a] \quad |\psi'(y)| \leq M \frac{y^4}{144}$$

$$\text{pour } z \in [0, a]$$

$$\int_0^z |\psi'(t)|dt \leq M \int_0^z \frac{t^4}{144}dt$$

$$|\int_0^z \psi'(t)dt| \leq M \int_0^z \frac{t^4}{144}dt$$

$$\text{donc } |\psi(z) - \psi(0)| \leq M \frac{z^5}{720} \quad \text{or } \psi(0) = 0$$

$$\forall z \in [0, a] \quad |\psi(z)| \leq M \frac{z^5}{720}$$

4.

$$\forall z \in [0, a] \quad |\psi(z)| \leq M \frac{z^5}{720}$$

D'après 2/ ψ est dérivable sur $[0, a]$ donc continue sur $[0, a]$.

$$\text{donc } |\psi(a)| \leq M \frac{a^5}{720} \text{ soit } -M \frac{a^5}{720} \leq \psi(a) \leq M \frac{a^5}{720}$$

Il en résulte que :

$$\exists R \in \mathbb{R} \text{ tel que } \psi(a) = R \text{ avec } -M \frac{a^5}{720} \leq R \leq M \frac{a^5}{720}$$

$$\text{or } \psi(a) = \int_0^a g(t) dt - \frac{a}{2}(g(0) + g(a)) - \frac{a^2}{12}(g'(0) - g'(a))$$

$$\text{donc } \int_0^a g(t) dt - \frac{a}{2}(g(0) + g(a)) - \frac{a^2}{12}(g'(0) - g'(a)) = R$$

$$\text{soit } \int_0^a g(t) dt = \frac{a}{2}(g(0) + g(a)) + \frac{a^2}{12}(g'(0) - g'(a)) + R \quad \text{avec } R \leq M \frac{a^5}{720}$$