Partie A

Soit le plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et le point A$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1

D la droite d'equation $x = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$. f_α application affine telle que :
$f_\alpha(0) = A$
$\overrightarrow{Mf_\alpha(M)} = \overrightarrow{i}$ M$\in D$

f_α application affine du plan donc $f_\alpha(U)\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = ux + vy + d \end{cases}$

$f_\alpha(0) = A \Rightarrow c = d = 1$.

$$\overrightarrow{Mf_\alpha(M)} \begin{pmatrix} x' - \alpha \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1)\begin{cases} a\alpha + by + 1 = \alpha + 1 \\ u\alpha + vy + 1 = y \end{cases} \quad \forall y \in P$$

Posons y=0 : $\begin{cases} a = 1 \\ u\alpha + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ u = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$

(1) donne $\begin{cases} \alpha + by + 1 = \alpha + 1 \\ vy = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ v = 1 \end{cases}$

donc $f_\alpha(U)\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -\frac{1}{\alpha}x + y + 1 \end{cases}$

2

si $\alpha = -1$ alors $f_\alpha(U)\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$ donc $f_\alpha = f$.

Soit M_1 et M_2 2 points du plan affine :

$f(M_1) = f(M_2) \Rightarrow$
$$\begin{cases} x_1 + 1 = x_2 + 1 \\ x_1 + y_1 + 1 = x_2 + y_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow M_1 = M_2$$

f est injective et comme f est une application affine de P dans P alors f est bijective.

Soit M point invariant par f alors :

$f_\alpha(M) = M \Rightarrow$

$\begin{cases} x+1 = x \\ x+y+1 = y \end{cases}$ impossible.

f n'admet pas de point invariant.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donc f(M)=f(O)+Q(M) avec Q endomorphisme dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3

a.

$\alpha(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + \beta(Q(\overrightarrow{i} + \lambda\overrightarrow{j})) = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha\lambda \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\lambda + \beta + \beta\lambda = 0 \end{cases}$ donc $\alpha = \beta = 0$

donc $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $Q(\overrightarrow{i} + \lambda\overrightarrow{j})$ forment une famille libre.

b.

Soit la droite Δ du plan affine d'equation $ax + by + c = 0$

L'image M' d'un point de la droite vérifie :

$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$.

donc $a(x' - 1) + b(y' - x') + c = 0$

$(a - b)x' + by' + c - a = 0$

si $b \neq 0$ L'image $f(\Delta)$ est donc une droite de pente $\frac{b-a}{b}$ qui ne peut donc pas être parallele à Δ de pente $-\frac{b}{a}$

En revanche si $b = 0$ la droite Δ et son image sont parralleles. La droite Δ est alors de la forme x=k.

4

a.

Δ a pour equation x=k.

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-k \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+k \end{pmatrix} = \overrightarrow{u_k}$

b.

Δ a pour equation y=k'.

$\begin{cases} x' = x+1 \\ 'y' = x+k'+1 \end{cases}.$

donc y'=x'+k' est l'equation de la droite $f(\Delta)$.

c.

Δ a pour equation y=tx.

$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = x+tx+1 \end{cases}.$

donc y'=x'+t(x'-1)= x'(t+1)-t est l'equation de la droite $f(\Delta)$.
Le point d´intersection P$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ entre Δ et $f(\Delta)$ est tel que :

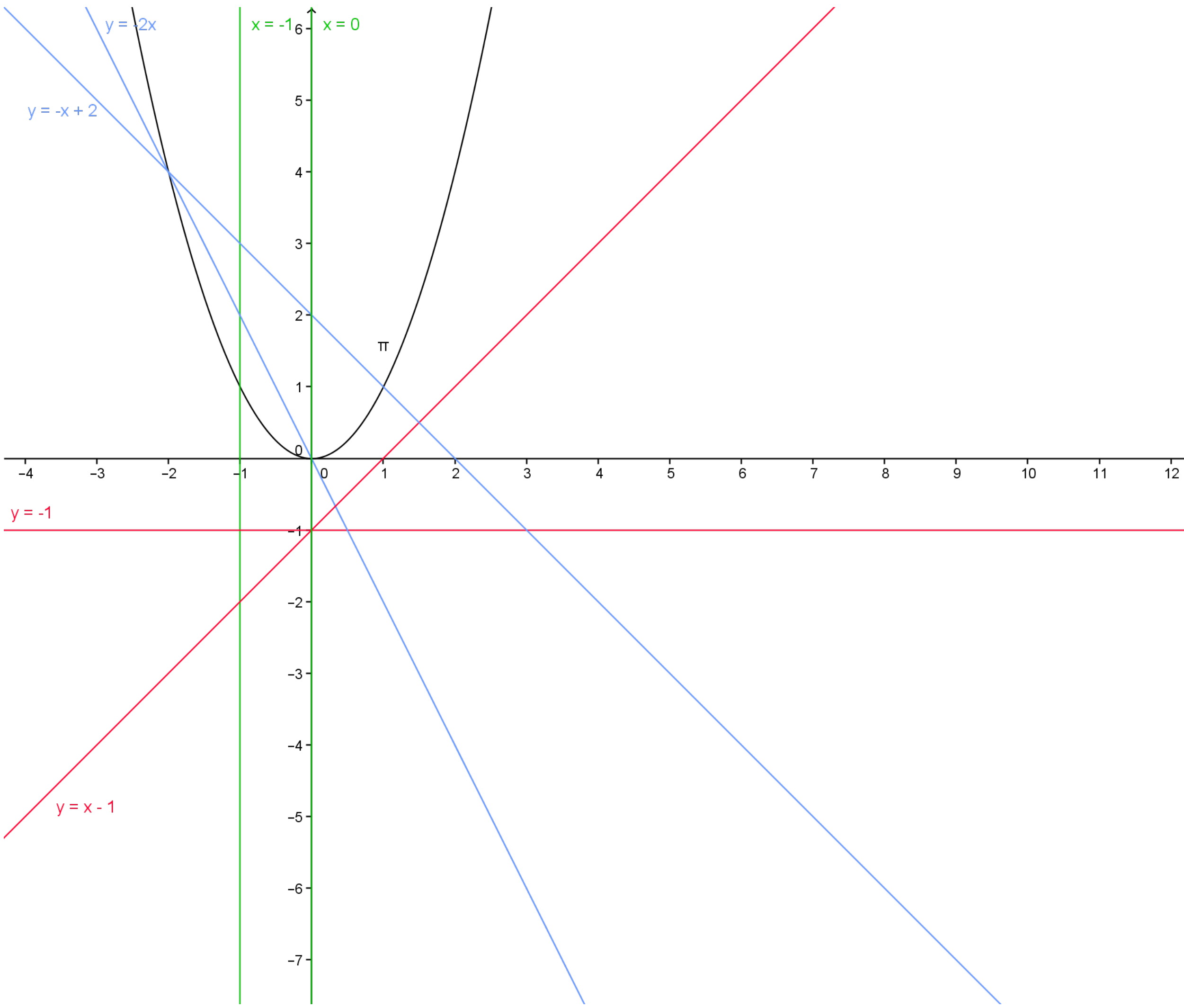
$\begin{cases} y_p = x_p(t+1)-t \\ y_p = tx_p \end{cases}.$

$\Rightarrow \begin{cases} tx_p = x_p(t+1)-t \\ y_p = tx_p \end{cases}.$

$\Rightarrow \begin{cases} x_p = t \\ y_p = t^2 \end{cases}.$

π decrit donc la parabole $y = x^2$ quand t decrit $\mathbb{R}$.

— $x = -1$ donc $f(\Delta)$ s'obtient par la translation de vecteur $\overrightarrow{i}$
— $y = -1$ donc $f(\Delta)$ est la droite y=x-1
— $y = -2x$ donc $f(\Delta)$ est la droite y=-x+2


y = -2x
x = -1
x = 0
y = -x + 2
π
y = -1
y = x - 1

5

$M_1 = f(M_0)$
$M_n = f(M_{n-1})$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_0 + 1 = 1 \\ y_1 = y_0 + x_0 + 1 = 1 \end{array}\right. .$$

$$M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} M_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} M_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} M_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

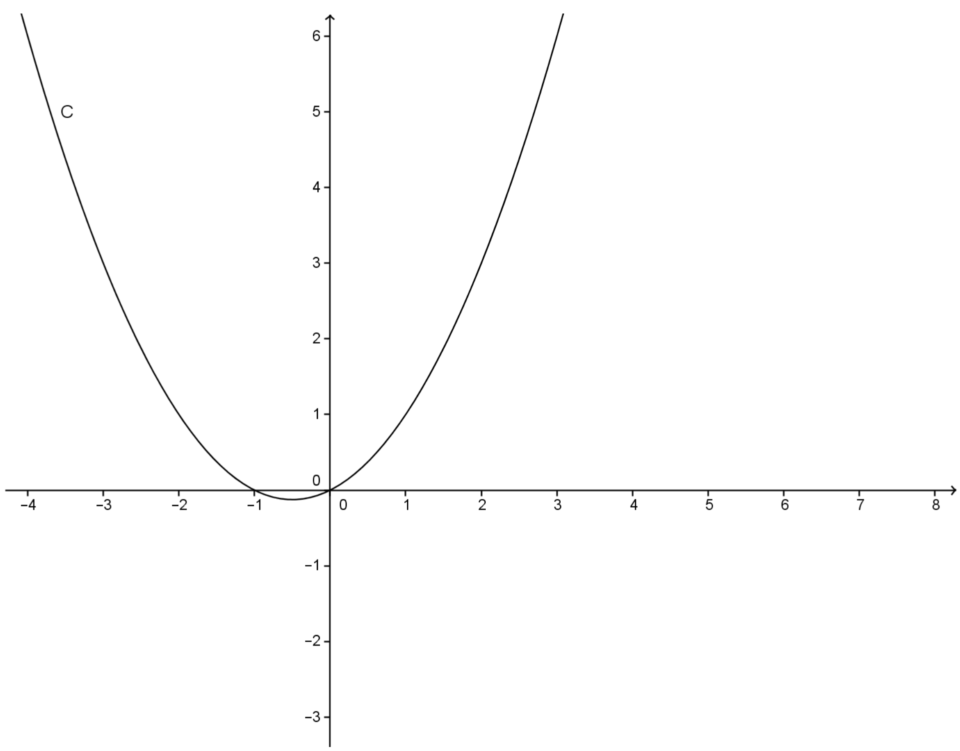
$$\left\{\begin{array}{l} x_n = x_{n-1} + 1 \\ y_1 = y_{n-1} + x_{n-1} + 1 \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_n = x_{n-2} + 2 = x_0 + n \\ y_n = x_n + y_{n-1} = n + y_{n-1} \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_n = n \\ y_n = n + n - 1 + y_{n-2} = n + n - 1 + n - 2 + ... + 1 + y_0 \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_n = n \\ y_n = \frac{1}{2}n(n+1) \end{array}\right. .$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $y_n = \frac{1}{2}x_n(x_n+1)$. M_n appartient donc à la courbe $y = \frac{1}{2}x(x+1)$.
Il s'agit de l'équation d´une parabole.



6

a.

g est continue donc intégrable soit G sa primitive :

$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g(x)dx = G(\lambda_2) - G(\lambda_1)$

$\int_{\lambda_1+1}^{\lambda_2+1} g(x-1)dx = G(\lambda_2+1-1) - G(\lambda_1+1-1) = G(\lambda_2) - G(\lambda_1)$

$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g(x)dx = \int_{\lambda_1+1}^{\lambda_2+1} g(x-1)dx$

b.

Soit τ représentée par y=h(x)

$$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = x+y+1 \end{cases}.$$

donc y'=x'+y $\Rightarrow$ y'=x'+h(x) $\Rightarrow$ y'=x'+h(x'-1) donc $f(\tau)$ est représentée par y=x+h(x-1)

si $y = \frac{1}{2}x(x+1)$ alors f(C) : $y = x + \frac{1}{2}(x-1)x = \frac{1}{2}x(x+1)$ donc f(C)=C.

c.

Determinons l'équation du segment $[M_{n-1}M_n]$:

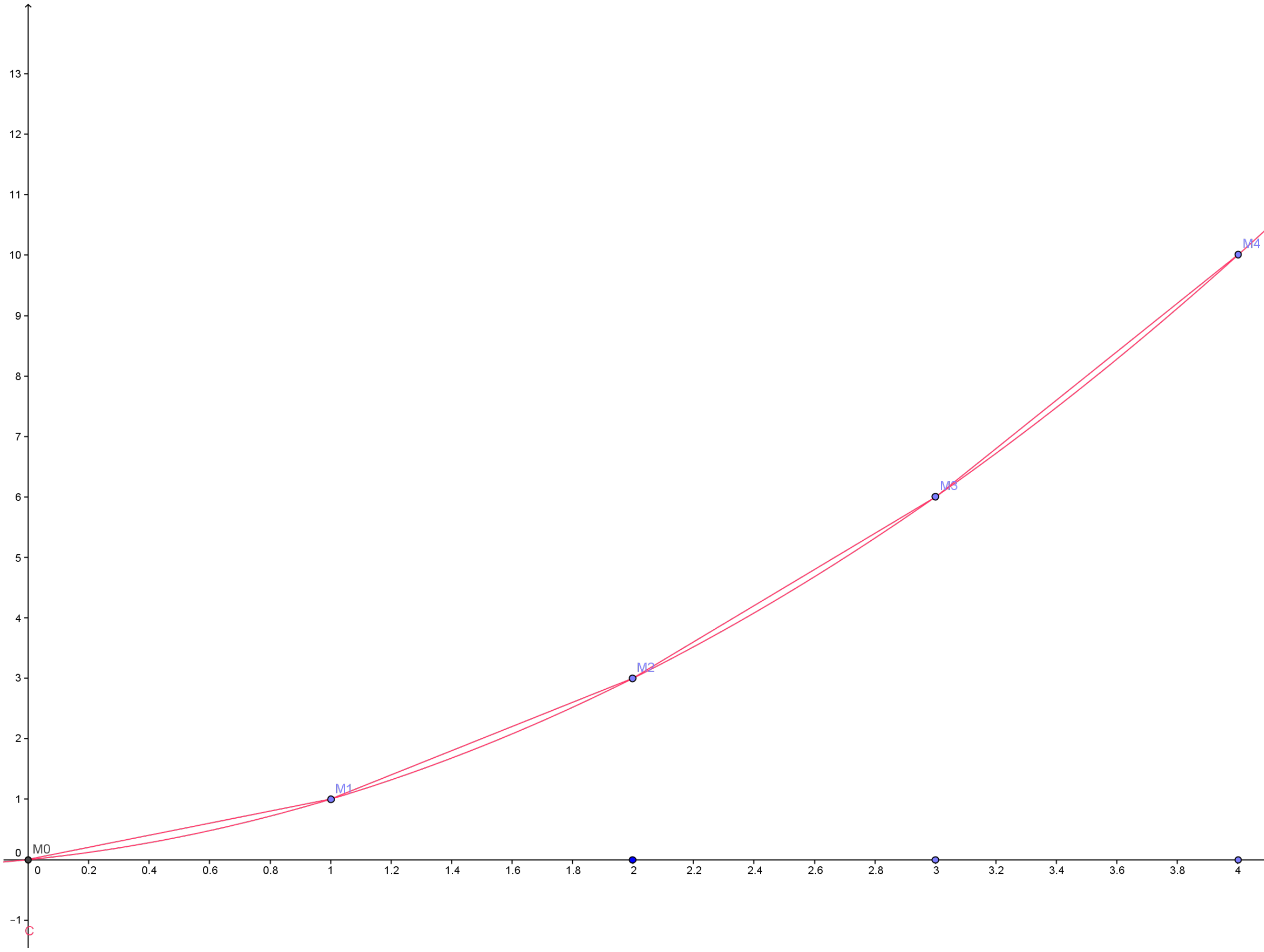
y=ax+b $\begin{cases} y_n = ax_n + b \\ y_{n-1} = ax_{n-1} + b \end{cases}.$

$y_n - y_{n-1} = a(x_n - x_{n-1}) = a$ or $y_n - y_{n-1} = n$ donc a=n

$b = \frac{1}{2}n(n+1) - n^2 = \frac{1}{2}n(1-n)$

$y = nx + \frac{1}{2}n(1-n)$

$A(E_n)$ represente l'aire comprise entre la courbe C et le segment $[M_{n-1}M_n]$:



$A(E_n) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} y(x) - (nx + \frac{1}{2}n(1-n))dx =$

$\int_{n-1}^{n} y(x)dx - n\int_{n-1}^{n} xdx - \frac{1}{2}n(1-n)\int_{n-1}^{n} dx$

L'image de C est f(C) donc $y(x) = y(x-1) + x$

$A(E_n) = \int_{n-1}^{n} y(x-1)dx + (1-n)\int_{n-1}^{n} xdx - \frac{1}{2}n(1-n)\int_{n-1}^{n} dx$

D´après 6.a : $\int_{n-1}^{n} y(x-1)dx = \int_{n-2}^{n-1} y(x)dx$

$A(E_n) = \int_{n-2}^{n-1} y(x)dx + (1-n)\int_{n-1}^{n} xdx - \frac{1}{2}n(1-n)\int_{n-2}^{n-1} dx$

De meme : $\int_{n-1}^{n} xdx = \int_{n-2}^{n-1}(x+1)dx$

$A(E_n) = \int_{n-2}^{n-1}(y(x) + (1-n)x + (1-n) - \frac{1}{2}n(1-n))dx$

$A(E_n) = \int_{n-2}^{n-1}(y(x) - (n-1)x + \frac{1}{2}(1-n)(2-n))dx$

$A(E_n) = \int_{n-2}^{n-1}(y(x) - ((n-1)x + \frac{1}{2}(n-1)(2-n))dx = A(E_{n-1})$

$A(E_n) = A(E_{n-1}) = A(E_1)$ donc $A(E_n)$ indépendant de n.

$A(E_n) = A(E_1) = \int_0^1 (y(x) - x)dx = \int_0^1 (\frac{1}{2}x(x+1) - x)dx$

$= \int_0^1 (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)dx = [\frac{1}{6}x^3]_0^1 - [\frac{1}{4}x^2]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$

$A(E_n) = -\frac{1}{12}$

Partie B

$h_0(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$

D´après 6.a/ :

$h_1(x) = h_0(x-1) + x = \mathrm{e}^{-(x-1)} - 1 + x$

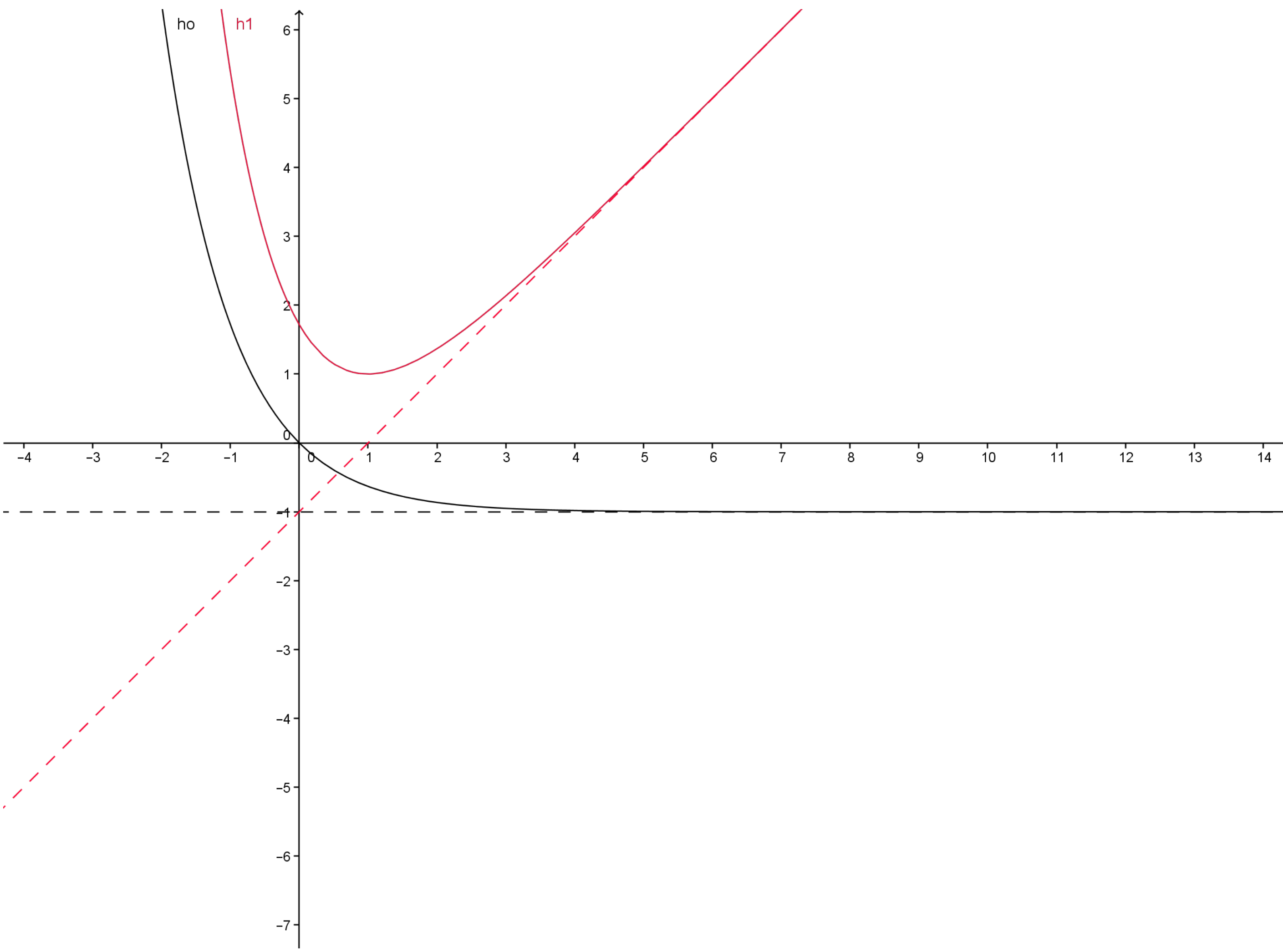
$h_0'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \prec 0$ donc h_0' strictement décroissante.

$h_1'(x) = -\mathrm{e}^{1-x} + 1$ donc $h_1'(x) \succ 0$ si $\mathrm{e}^{1-x} \prec 1 \Rightarrow 1 - x \prec 0 \Rightarrow x \succ 1$

$h_0(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} h_0(x) = -1$

$\frac{h_1(x)}{x} = \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{x} + 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{h_1(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} (h_1(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\mathrm{e}^{1-x} - 1) = -1$ donc y=x-1 asymptote de h_1



$A(\lambda) = \int_1^\lambda (h_1(x) - (x-1))dx = \int_1^\lambda \mathrm{e}^{1-x}\, dx = [-\mathrm{e}^{1-x}]_1^\lambda = 1 - \mathrm{e}^{1-\lambda}$

$\lim\limits_{x\to\infty} A(\lambda) = 1$