

Correction exercice 2.

04/05/24

1.

$$Z^2 - [(1+2i)u+1]Z + (-1+i)u^2 + iu = 0..$$

$$\Delta = [(1+2i)u+1]^2 - 4[(-1+i)u^2 + iu] = -3u^2 + 4iu^2 + 1 + 2u + 4iu + 4u^2 - 4iu^2 - 4iu$$

$$\Delta = u^2 + 2u + 1 = (u+1)^2$$

$$z' = \frac{[(1+2i)u+1] + u + 1}{2} = \frac{2u + 2iu + 2}{2} = u(1+i) + 1.$$

$$z'' = \frac{[(1+2i)u+1] - (u+1)}{2} = iu.$$

2.

P point d'affixe u

M' point d'affixe z'

$$z' = u(1+i) + 1$$

Il s'agit d'une similitude directe de type $z' = au + b$, le point fixe C d'affixe c vérifie :

$$c = c(1+i) + 1 \text{ donc } c = i.$$

$$z' - i = (i+1)u + 1 - i = (1+i)u - (i^2 + i) = (1+i)(u - i) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) (u - i)$$

$$z' - i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (u - i).$$

La transformation T1 qui passe de P à M' est donc une similitude qui est la composée :

- d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ de centre C d'affixe i.
- d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre C.

$$z'' = e^{\frac{i\pi}{2}} u.$$

La transformation T2 qui passe de P à M'' est donc une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3.

$$z' = u + iu + 1.$$

$$iz' = iu - u + i$$

$$z' = z'' + u + 1 \text{ donc}$$

$$z'(i+1) = 2z'' + i + 1 \text{ soit } z'' = \frac{i+1}{2}(z' - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$z'' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (z' - 1).$$

Donc la transformation T qui passe de M' à M'' est la composée $f_3 \circ f_2 \circ f_1$, avec :

1. f_1 : translation d'affixe -1.
2. f_2 : rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
3. f_3 : homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de centre O.