EXERCICE 2

Soit s la similitude qui à tout point M du plan complexe d'affixe z associe M' d'affixe z' tel que :
z'=(-3+4i)$\bar{z}$ + 4 −10i.

1/ Déterminer le point invariant Ω de s.

s(Ω)=Ω donc x+iy =(-3+4i)(x−iy)+4−10i=(−3x +4y+4)+i(4x+3y−10)

$\begin{cases} x=-3x+4y+4 \\ y=4x+3y-10 \end{cases}$ $\begin{cases} -4x+4y+4=0 \\ 4x+2y-10=0 \end{cases}$

6y=6 donc y=1 et x=2.   Ω(2;1).

2/ Montrer que la similitude s peut s'écrire sous la forme hoσ où h est une homothétie de rapport 5 et de centre Ω
et σ une isométrie que l'on précisera.

s est une similitude indirecte avec un point invariant, elle est donc la composée d'une homothétie et d'une réflexion σ de centre Ω
Posons :

σ la reflexion d'affixe de centre Ω $z'=(\frac{-3}{5}+\frac{4}{5}i)(\bar{z}-\bar{\Omega})+\Omega$

h l'homothétie de rapport 5 d'affixe z'-Ω=5(z−Ω)

hoσ a un affixe $z'-\Omega=5((\frac{-3}{5}+\frac{4}{5}i)(\bar{z}-\bar{\Omega})+\Omega-\Omega)$

z'−Ω=(-3+4i)($\bar{z}$−2+i)=(-3+4i)$\bar{z}$+2-11i donc z'=(-3+4i)$\bar{z}$ + 4 −10i.
donc s=hoσ.
σ est une réflexion d'axe (D) passant par Ω. I milieu de [Oσ(O)] appartient à (D).

$z'_O=(\frac{-3}{5}+\frac{4}{5}i)(0-\bar{\Omega})+\Omega=\frac{12}{5}-\frac{6}{5}i$. donc $z'_I=\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$.

(D) est la droite de vecteur directeur $\vec{I\Omega}$ d'affixe $z_\Omega-z_i=2+i-\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i=\frac{4}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{4}{\sqrt{5}}e^{i\theta}$.

$\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{5}}$ donc la droite (D) a un angle θ=1,107 rad avec l'axe des x.