

Correction exercice 2 :

Soit f_k l'application du plan affine qui transforme M en M' :

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = x + ky \end{cases}$$

1.

$f_k(M) = M$ si

$$\begin{cases} x = kx \\ y = x + ky \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x(1-k) = 0 \\ y(1-k) = x \end{cases}$$

Si $x \neq 0$ alors $k=1$ et on arrive à une contradiction ($x=0$) donc $x=0$.

- Si $k \neq 1$ alors $y=0$ et le seul point invariant est O .
- Si $k=1$ alors l'ensemble des points invariant est la droite $x=0$.

2.

f_0 est définie par :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = x \end{cases}$$

Il s'agit de : $p \circ S$ où S est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y=x$ et p la projection orthogonale sur l'axe des ordonnées.

3.

$f_k' \circ f_k$ est représentée par le point M_2 :

$$\begin{cases} x_2 = k'x' \\ y_2 = x' + k'y' \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_2 = k'kx \\ y_2 = kx + k'(x + ky) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_2 = k'kx \\ y_2 = (k+k')x + k'ky \end{cases}$$

si $k=-k'$

$$\begin{cases} x_2 = -k^2x \\ y_2 = -k^2y \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{OM_2} = -k^2 \times \overrightarrow{OM} \text{ c'est à dire une homothétie de centre } O \text{ et de rapport } -k^2.$$

4.

En procédant étape par étape :

$$M_1 = S(X) \text{ donne : } \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = x \end{cases}$$

$$M_2 = f_k \circ S : \begin{cases} x_2 = kx_1 = ky \\ y_2 = x_1 + ky_1 = y + kx \end{cases}$$

$$M_3 = s \circ f_k \circ S : \begin{cases} x_3 = -x_2 = -ky \\ y_3 = y_2 = y + kx \end{cases}$$

$$M_4 = f_k \circ s \circ f_k \circ S : \begin{cases} x_4 = kx_3 = -k^2 y \\ y_4 = x_3 + ky_3 = k^2 x \end{cases}$$

On a $\overrightarrow{OM}_4 = k^2 \overrightarrow{OM}_5$ avec $\overrightarrow{OM}_5 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. On note que : $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}_5 = 0$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM}_5\|$ donc

$f_k \circ s \circ f_k \circ S = H \circ R$ où H est une homothétie de rapport k^2 et de centre O et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, c'est donc une similitude directe de centre O, de rapport k^2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.