PARTIE A

x^2-$8y^2$=1 (E)

1/ le couple (1;0) est solution de (E).

2/ A=$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$et

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$=A$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

x_0=1 y_0=0.

a/ x_0^2-$8y_0^2$=1 donc (x_0;y_0) solution de (E). De même $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$=A$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc le couple(x_1;y_1) est solution de (E).

Supposons le couple(x_n;y_n) solution de (E):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n+8y_n \\ y_{n+1} = x_n+3y_n \end{cases}$$

$$x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 9x_n^2 + 64y_n^2 + 48x_ny_n - 8x_n^2 - 72y_n^2 - 48x_ny_n = x_n^2 - 8y_n^2 = 1$$

puisque (x_n;y_n) solution de (E).

Par récurrence on en déduit que le couple(x_n;y_n) est solution de (E) pour tout entier naturel n.

b/

x_n^2=1+$8y_n^2$ donc x_n>0 pour tout n.

de plus y_0=0 et y_1=1≥0 et y_{n+1}=x_n+$3y_n$ donc si y_n>=0 alors y_{n+1}≥0 par récurrence y_n≥0 pour tout n.

or x_{n+1}-x_n=$2x_n$+$8y_n$>0 car y_n≥0 et x_n>0. il en résulte que x_{n+1}> x_n pour tout n.

3/

le couple(x_n;y_n) est solution de (E) d'après 2/a/ et(x_n) est une suite d'entiers naturels strictement croissante à valeurs positives donc avec un nombre infini d'éléments.

Il en résulte que (E) admet une infinité de solutions.