Correction exercice 2 :

Soient a, b, c entiers tels que :

pgcd(a,b)=3 et pgcd (b,c)=4

1.

On peut écrire que :

$$\begin{cases} \exists (u,v)\in\mathbb{Z}^2,\ au+bv=3 \\ \exists (u',v')\in\mathbb{Z}^2,\ bu'+cv'=4 \end{cases}$$

il en résulte que :

$$b(u'-v)+cv'-au=1$$

D'après le théorème de Bézout, b, c et a sont premiers entre eux.

2.

Considérons la décomposition en nombre premiers de a, b et c :

$a=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ avec α_i entier positif ou nul.

$b=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$ avec β_i entier positif ou nul.

$c=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\gamma_i}$ avec γ_i entier positif ou nul.

On a donc :

$$abc=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i+\beta_i+\gamma_i}.$$

et :

$$pgcd(a,b)=\prod_{i=1}^{n} p_i^{min(\alpha_i,\beta_i)} \quad pgcd(b,c)=\prod_{i=1}^{n} p_i^{min(\beta_i,\gamma_i)} \quad ppcm(a,b,c)=\prod_{i=1}^{n} p_i^{max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)}.$$

donc :

$$pgcd(a,b)\times ppcm(a,b,c)\times pgcd(b,c)=\prod_{i=1}^{n} p_i^{min(\alpha_i,\beta_i)+min(\alpha_i,\beta_i)+max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)}$$

or pgcd (a,c)=1 donc : $si\ \alpha_i \neq 0\ alors\ \gamma_i = 0$ et $si\ \alpha_i = 0\ alors\ \gamma_i \neq 0$.

Examinons $K_i = min(\alpha_i, \beta_i) + min(\beta_i, \gamma_i) + max(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$:

1. $\alpha_i \neq 0,\ donc\ \gamma_i = 0,\ \alpha_i \leq \beta_i$:

   $K_i = \alpha_i + 0 + \beta_i$ donc $K_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$.

2. $\alpha_i \neq 0,\ donc\ \gamma_i = 0,\ \alpha_i \geq \beta_i$:

   $K_i = \beta_i + 0 + \alpha_i$ donc $K_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$.

3. $\alpha_i = 0,\ donc\ \gamma_i \neq 0,\ \gamma_i \leq \beta_i$:

   $K_i = 0 + \gamma_i + \beta_i$ donc $K_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$.

4. $\alpha_i = 0,\ donc\ \gamma_i \neq 0,\ \gamma_i \geq \beta_i$:

   $K_i = 0 + \beta_i + \gamma_i$ donc $K_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$.

Il en résulte que :

$pgcd(a,b) \times ppcm(a,b,c) \times pgcd(b,c) = abc$ avec pgcd(a,c)=1.

3.

$\begin{cases} abc = 12096 \\ pgcd(a,b) = 3 \\ pgcd(b,c) = 4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} abc = 2^6 \times 3^3 \times 7 \\ a = 3u\ \ b = 3v,\ u \wedge v = 1 \\ b = 4u'\ c = 4v',\ u' \wedge v' = 1 \end{cases}$

soit :

$4u' = 3v$ or 3 et 4 sont premiers entre eux donc d’après Gauss, 3 divise u’ :

$u' = 3n\ donc\ b = 3v = 4 \times 3 \times n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

on peut donc écrire :

$$\begin{cases} abc = 2^6 \times 3^7 \times 7 \\ a = 3u \quad\ v = 4n\ ,\ u \wedge 4n = 1 \\ b = 4 \times 3n\ c = 4v',\ 3n \wedge v' = 1 \end{cases}$$

soit :

$3u \times 4 \times 3n \times 4v' = 2^6 \times 3^3 \times 7$ donc :

$u \times n \times v' = 2^2 \times 3 \times 7$ avec $u \wedge 4n = 1\ et\ 3n \wedge v' = 1$.

on a donc les possibilités suivantes :

$\begin{cases} u=3 \\ n=7 \\ v'=2^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u=7 \\ n=3 \\ v'=2^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u=3 \\ n=2^2 \\ v'=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u=3\times 7 \\ n=2^2 \\ v'=1 \end{cases}$

soit :

$\begin{cases} a=9 \\ b=84 \\ c=16 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=21 \\ b=36 \\ c=16 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=9 \\ b=48 \\ c=28 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=63 \\ b=48 \\ c=4 \end{cases}$