Correction exercice 1 :

f(x)=$\cos(3x)\cos^3(x)$.

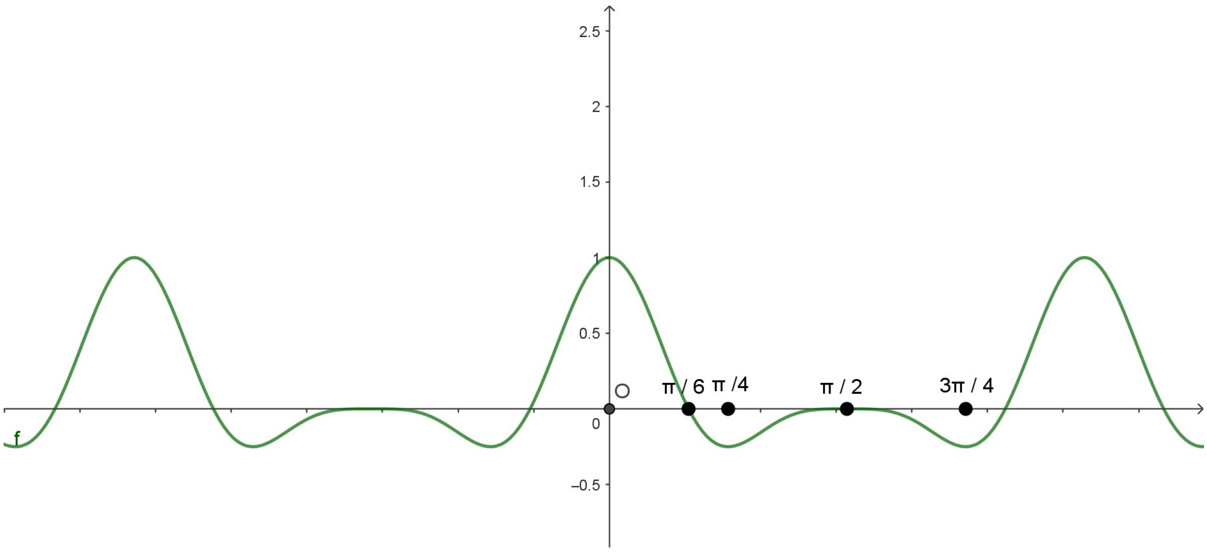
1.

$f'(x)=-3\sin(3x)\cos^3(x)-3\cos^2(x)\sin(x)\cos(3x)$

$f'(x)=-3\cos^2(x)(\sin(3x)\cos(x)+\sin(x)\cos(3x))=-3\cos^2(x)\sin(4x)$.

$f(x+\pi)=f(x)$ et f est paire, on peut donc étudier f sur [0,π].

x	0 π/4	π/2	3π/4
f'(x)	0 - 0	+ 0	- 0
f(x)	↘	↗	↘



2.

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\cos^3(x)=\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{-2ix}e^{ix}}{8}$$

$$\cos^3(x)=\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{8}+3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{8}$$

donc $\cos^3(x)=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$

$$f(x)=\frac{1}{4}\cos^2(3x)+\frac{3}{4}\cos(3x)\cos(x)$$

$$\cos(6x)=2\cos^2(3x)-1 \textit{ donc } \cos^2(3x)=\frac{1+\cos(6x)}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{8}\cos(6x)+\frac{3}{4}\cos(3x)\cos(x)+\frac{1}{8}.$$

or $\cos(6x)\cos(3x)=\frac{1}{2}(\cos(4x)+\cos(2x))$ donc

$$f(x)=\frac{1}{8}\cos(6x)+\frac{3}{8}\cos(4x)+\frac{3}{8}\cos(2x)+\frac{1}{8}.$$

3.

L'aire A est donnée en u.a (unité d'aire) par la formule :

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(6x)dx+\frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(4x)dx+\frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(2x)dx+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx$$

$$A=\frac{1}{8}\left[\frac{\sin(6x)}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{3}{8}\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{3}{8}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi}{48}$$

$$A=0+\frac{3}{32}x\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{16}x\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{48}$$

$$A=\frac{3\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{32}+\frac{\pi}{48}=\left(9\frac{\sqrt{3}}{64}+\frac{\pi}{48}\right)\ u.a$$

D'après 1/ 1u.a = 9 cm² donc

$A=\frac{81\sqrt{3}}{64}+\frac{9\pi}{48}$ cm².