
Calcul de $S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{5^k}$

$$\begin{cases} S_{1n} = \frac{-1}{5^1} - \frac{3}{5^3} - \frac{5}{5^5} - \dots - \frac{2n+1}{5^{2n+1}} \\ S_{2n} = \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{2n}{5^{2n}} \\ S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{1n} \\ S_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \\ S = S_1 + S_2 \end{cases}$$

Calcul de $5S_1 + S_2$:

$$\begin{aligned} 5S_{1n} &= \sum_{k=0}^n \frac{-(2k+1)}{5^{2k}} \\ 5S_{1n} + S_{2n} &= \sum_{k=0}^n \frac{-(2k+1)}{5^{2k}} + \sum_{k=1}^n \frac{2k}{5^{2k}} = -(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^{2k}}) \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de $n+1$ termes, de 1er terme $u_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{5^2}$:

$$5S_1 + S_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1 - \left(\frac{1}{5^2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5^2}} = -\frac{25}{24}$$

Calcul de $5S_2 + S_1$:

$$\begin{aligned} 5S_{2n} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k}{5^{2k-1}} \\ 5S_{2n} + S_{1n} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k}{5^{2k-1}} + \sum_{k=1}^n \frac{-(2k-1)}{5^{2k-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^{2k-1}} \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de $n+1$ termes, de 1er terme $u_0 = \frac{1}{5}$ et de raison $\frac{1}{5^2}$:

$$5S_2 + S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5^2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5^2}}\right) = \frac{5}{24}$$

Soit un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 5S_1 + S_2 = -\frac{25}{24} \\ 5S_2 + S_1 = \frac{5}{24} \end{cases}$$

$$6(S_1 + S_2) = -\frac{20}{24} \text{ donc : } \boxed{S = -\frac{5}{36}}$$