BAC C Reims 1982

Exercice 1 **4 Points**

1. Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que n+2 divise 2n-1.
2. Montrer que pour tout entier relatif n, les nombres $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.
3. Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs n, $n \neq -2$ tels que $\dfrac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

PROBLÈME **12 Points**

Soit E le plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$.
On munit l'ensemble L(E) des endomorphismes de E de sa structure usuelle d'espace vectoriel.
Pour chaque endomorphisme f de E, on note $M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et $T(f)$ le réel a+d.
L'application identique de E sera notée Id.
On appelle F l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $M(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ avec (a, b, d) réels quelconques.

Partie A

On note f_1, f_2, f_3 les endomorphismes de E de matrices
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ respectivement dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1/ Montrer que F est un sous-espace vectoriel de L(E) de base (f_1, f_2, f_3).

2/ Trouver deux éléments f et g de F tels que gof ne soit pas dans F.

3/ Montrer qu'il existe un endomorphisme r de F, et un seul, vérifiant :

$r(f_1) = \frac{1}{2}(f_1 - f_2 + f_3)$

$r(f_2) = f_1 - f_3$

$r(f_3) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + f_3)$.

Soit un élément f de F tel que $M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$: calculer en fonction de (a, b, d) $M(f')$ où $f' = r(f)$.

Partie B

Soit t la restriction de T à F.

1/ Montrer que t est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.

2/ Montrer que le noyau de t, $Ker\ t$, est un plan vectoriel de F contenant toujours les symétries orthogonales par rapport aux droites vectorielles de E.

3/ Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de E, on note $S_{\vec{u}}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\vec{u}$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E et α une mesure de l'angle du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

a) Quelle est la nature de la transformation $R = S_{\vec{v}} o S_{\vec{u}}$?

b) Calculer $T(R)$ en fonction de α.

Partie C

Soit $\varphi : F \times F \to \mathbb{R}$, l'application définie par $\varphi(f, g) = T(gof)$.

1/ Montrer que φ est un produit scalaire sur F.

2/ a) Calculer $\varphi(f, Id)$ pour tout f $\in F$.

b) En déduire l'orthogonal de $ker\ t$ pour φ.

3/ On reprend l'endomorphisme r défini à la question A-3.

a) Montrer que r est une isométrie vectorielle de F pour le produit scalaire φ.

b) Calculer r(Id) et en déduire que $r(ker\ t) = ker\ t$.

c) Calculer $\varphi(f, r(f))$ pour tout f élément de $ker\ t$.

d) En déduire que r est une rotation de F. Que peut-on dire de son angle ?