

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit $\alpha \in [0; 2\pi[$

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha} (1 + 2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I :

- 0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha} (1 - 2i))^2$
- 0.5 b) En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$
- 0.25 2- Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note par $M(z)$ le point d'affixe le nombre complexe z

On pose $\frac{b}{a} = \lambda i$ avec $\lambda = \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$

1- On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

0.5 a) Montrer que : $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$ puis en déduire que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

0.5 b) Montrer que : $\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$ puis en déduire que les points H, A et B sont alignés.

2- Soient $I(m)$ le milieu du segment $[OH]$ et $J(n)$ le milieu du segment $[HB]$

0.5 a) Montrer que : $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$

0.5 b) En déduire que les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires et que $OJ = |\lambda| AI$

0.25 c) Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI)

Montrer que les points K, I, H et J sont cocycliques.

0.25 d) Montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires.