

Correction BAC Maroc 2025 – Exercice 2

$$\alpha \in [0, 2\pi] \quad (E_\alpha) : Z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

PARTIE I

1-a)

$$\Delta = (2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i))^2 - 4 \times (i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha})$$

$$\Delta = 2^{2\alpha} e^{2i\alpha} (-3+4i) - 4 \times i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = (2^\alpha e^{i\alpha})^2 (-3+4i-4i \times 2)$$

$$\Delta = (2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i))^2$$

1-b) Le discriminant est strictement positif donc (E_α) admet 2 solutions :

$$a = \frac{2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i) + 2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i)}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i) - 2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i)}{2}$$

$$a = 2^\alpha e^{i\alpha}$$

$$b = 2^{\alpha+1} i e^{i\alpha}$$

2) $\frac{b}{a} = 2i$ donc imaginaire pur.

PARTIE II

1) Soient les points A(a), B(b), H(h) avec : $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $\frac{b}{a} = \lambda i$

a)

$$\frac{h}{b-a} = \frac{h}{a(\frac{b}{a}-1)} = \frac{h}{a(\lambda i-1)}$$

$$\text{et } h = \frac{ab}{b+a} \quad \frac{h}{a} = \frac{b}{b+a} = \frac{\lambda i}{\lambda i+1}$$

$$\frac{h}{b-a} = \frac{\lambda i}{(\lambda i+1)(\lambda i-1)} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OH}) = \text{Arg}\left(\frac{h}{b-a}\right) = \text{Arg}\left(-\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i\right) = -\frac{\pi}{2}$ donc les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

Correction BAC Maroc 2025 – Exercice 2

b)

$$\frac{h-a}{b-a} = \frac{h}{b-a} - \frac{a}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i - \frac{1}{\lambda i - 1} = \frac{1}{\lambda^2+1}.$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = \text{Arg}\left(\frac{h-a}{b-a}\right) = 0. \text{ donc A,B,H sont alignés.}$$

2/ I(m) milieu de [OH] et J(n) milieu de [HB].

a)

$$m = \frac{h}{2} \quad n = \frac{h+b}{2}$$

$$\frac{n}{b-a} = \frac{h+b}{2\left(\frac{h}{2}-a\right)} = \frac{\frac{h}{a} + \lambda i}{\frac{h}{a} - 2}$$

$$\text{et } \frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i \quad \text{donc } \frac{\frac{h}{a}}{\lambda i - 1} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$$

$$\frac{h}{a} = \frac{\lambda^2 + \lambda i}{1 + \lambda^2} \quad \text{soit}$$

$$\frac{n}{m-a} = \frac{\frac{\lambda^2 + \lambda i}{1 + \lambda^2} + \lambda i}{\frac{\lambda^2 + \lambda i}{1 + \lambda^2} - 2} = \frac{\lambda^3 i + 2\lambda i + \lambda^2}{\lambda i - \lambda^2 - 2} = \lambda i \left(\frac{\lambda^2 + 2 - \lambda i}{\lambda i - \lambda^2 - 2} \right) = -\lambda i$$

b)

$$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{OJ}) = \text{Arg}\left(\frac{n}{m-a}\right) = -\frac{\pi}{2}. \text{ Les droites (OJ) et (AI) sont donc perpendiculaires.}$$

$$OJ = |n| = |-\lambda i(m-a)| = |\lambda||m-a| = |\lambda| AI.$$

c)

on a : $KI \perp KJ$ car $KI \in (AI)$ et $KJ \in (OJ)$ donc $K \in (C)$ de diamètre IJ

De plus $HI \perp HJ$ car $HI \in (OH)$ et $HJ \in (AB)$ et (OH) et (AB) perpendiculaires d'après 1a) donc $H \in (C)$ de diamètre IJ.

Il en résulte que K,I,J,H font partie du cercle (C) de diamètre IJ.

Correction BAC Maroc 2025 – Exercice 2

d)

$$(\widehat{\vec{IJ}, \vec{OA}}) = \text{Arg}\left(\frac{a}{n-m}\right) = \text{Arg}\left(\frac{a}{\frac{h+b}{2} - \frac{h}{2}}\right) = \text{Arg}\left(\frac{2a}{b}\right) = \text{Arg}\left(\frac{-2}{\lambda}i\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

donc (IJ) et (OA) sont perpendiculaires.