Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Besançon

EXERCICE 1

1. Calculer la somme suivante pour x réel et p entier naturel

$$1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^p x^p.$$

2. Montrer que quels que soient les entiers naturels x et n, l'entier $x^{2n+1} + 1$ est divisible par $x + 1$.
3. En déduire que, quel que soit l'entier naturel p, $\left(2^{\left(2^p\right)}\right)^k + 1$ est divisible par $2^{\left(2^p\right)} + 1$ si l'entier k est impair.
4. Démontrer qu'une condition nécessaire pour que $2^m + 1$ soit premier est que l'entier naturel m soit une puissance de 2. On ne cherchera pas à étudier si cette condition est suffisante.

EXERCICE 2

P est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
S est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $y = x$, s est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine passant par O et de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.
k étant un réel donné on considère l'application du plan dans lui-même associant au point M de coordonnées x et y le point M' de coordonnées x' et y' définies par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & kx \\ y' & = & x + ky. \end{array}\right.$$

Soit f_k cette application.

1. Trouver l'ensemble des poins invariants par f_k.
2. Montrer que f_0 est la composée de deux applications simples à déterminer.
3. Trouver l'expression analytique de $f_{k'} \circ f_k$ pour deux réels k et k' quelconques. Donner la nature de la composée pour $k' = -k$.
4. Déterminer analytiquement l'application $f_k \circ s \circ f_k \circ \text{S}$. Reconnaître cette application et donner ses éléments caractéristiques, directement ou en utilisant les nombres complexes.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2. Déterminer les réels a, b, c tels que, quel que soit le réel t appartenant au domaine de définition de f

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t}.$$

3. Montrer l'existence du réel

$$A(x,y) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour x strictement positif et x strictement inférieur à y.
Donner une interprétation géométrique de ce réel.

Partie B

Soit g la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$g(t) = -\frac{1}{t^2(1+t)}.$$

1. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t) - f(t) \end{array}$$

admet des primitives. Les calculer.

2. En déduire

$$B(x,\ y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$$

pour x strictement positif et x strictement inférieur à y.

3. x étant fixé, trouver la limite $F(x)$ de $A(x,y)$ quand $y \to +\infty$ puis la limite $G(x)$ de $B(x,y)$ quand $y \to +\infty$.

Partie C

On suppose x réel positif strictement.

1. Étudier les variations de la fonction F.
En déduire que : quel que soit x strictement positif, $0 < F(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction G. En déduire que quel que soit x strictement positif, $G(x) < 0$.

3. Déduire des questions précédentes que : quel que soit x strictement positif,

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$

4. Puis que pour tout entier naturel non nul n,

$$1 < \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$