

PREMIER EXERCICE (sur 4 points)

Pour chaque couple (a, q) d'entiers naturels tels que $1 \leq q \leq a$ on note b_q le quotient dans la division euclidienne de a par q .

On appelle S_q l'ensemble des entiers naturels non nuls b tels que q soit le quotient dans la division euclidienne de a par b .

1^o On suppose dans cette question que $a = 1982$.

a. Déterminer b_1 ; b_8 ; b_9 ; b_{1982} .

b. Soit b un entier naturel non nul.

Démontrer que $b \leq b_8$ si et seulement si $8b \leq 1982$.

Démontrer que $b > b_9$ si et seulement si $9b > 1982$.

c. En déduire que $S_8 = \{b \in \mathbb{N} ; b_9 < b \leq b_8\}$.

Déterminer le cardinal de S_8 .

2^o On suppose que a est quelconque et que $1 \leq q < a$.

a. Démontrer que $Sq = \{b \in \mathbb{N} ; b_{q+1} < b \leq b_q\}$.

b. Démontrer que $\forall a \geq 1 \sum_{q=1}^a \text{Card.}(S_q) = a$

où $\text{Card.}(S_q)$ désigne le cardinal de S_q .