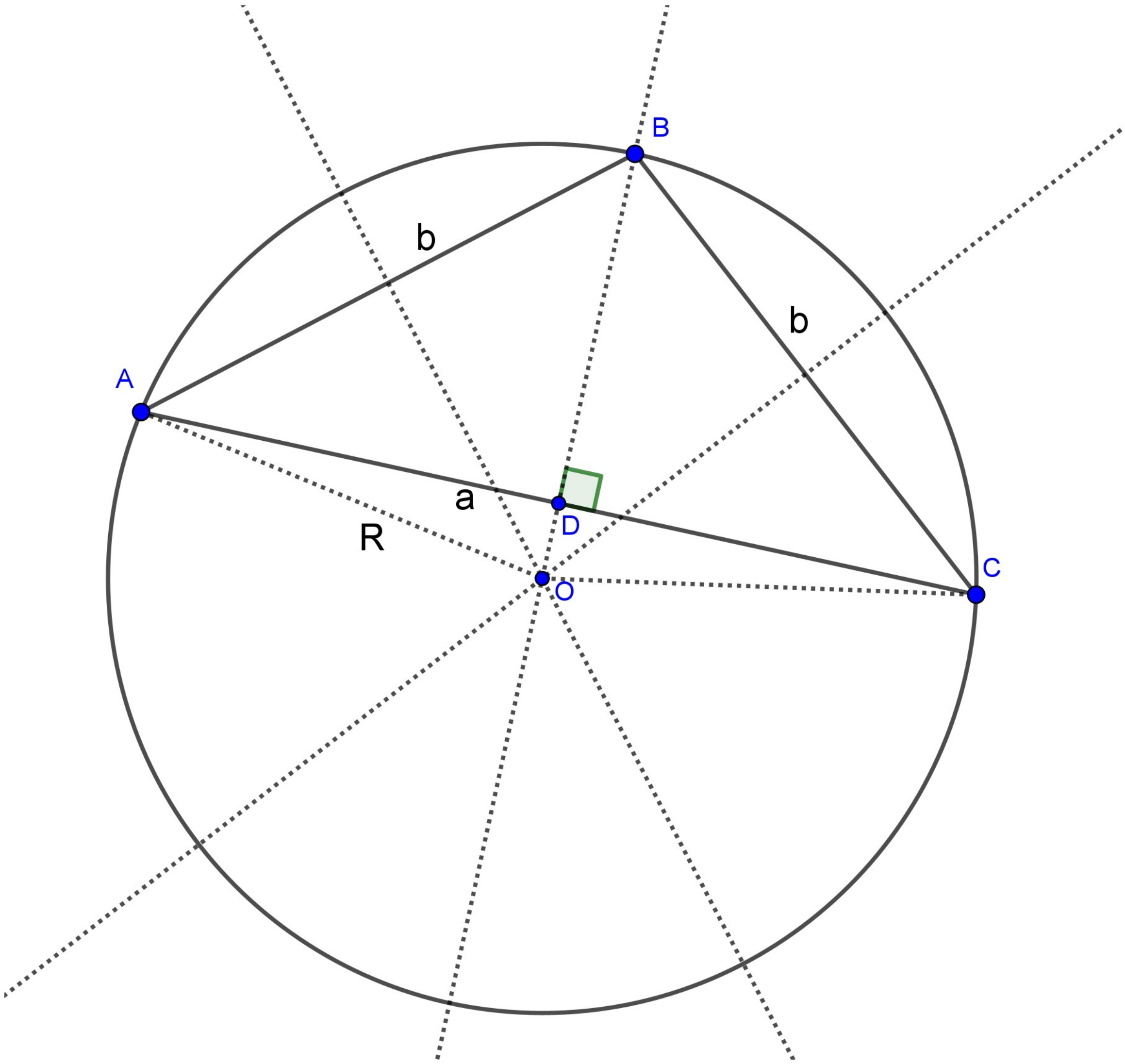
1/ D'après l'inégalité triangulaire : $AC < AB + BC$ donc $a < 2b$ soit $b > \frac{a}{2}$.

2/ Le centre O du cercle est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC :



Le triangle CDO est rectangle en D donc : $\frac{a^2}{4} + OD^2 = R^2$ (1)

Le triangle BDC est rectangle en D donc : $(R - OD)^2 + \frac{a^2}{4} = b^2$ (2)

D'après (1) : $OD^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$.

D'après (2) : $R^2 + OD^2 - 2R \times OD + \frac{a^2}{4} = b^2$

$$2R^2 - 2R \times OD = b^2$$
$$OD = R - \frac{b^2}{2R}$$

En remplaçant dans (1) :

$$\frac{a^2}{4} + \left(R - \frac{b^2}{2R}\right)^2 = R^2$$
$$\frac{a^2}{4} + R^2 - b^2 + \frac{b^4}{4R^2} = R^2$$
$$\frac{b^4}{4R^2} = b^2 - \frac{a^2}{4} \quad et \quad d'après \quad 1/ \quad b^2 > \frac{a^2}{4}$$
$$R^2 = \frac{b^4}{4b^2 - a^2}$$

$$\boxed{R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}}$$

3/ a/ Il s'agit d'effectuer l'analyse de la fonction R(b) en calculant sa dérivée :

$$R'(b) = \frac{2b\sqrt{4b^2 - a^2} - \frac{8b \times b^2}{2\sqrt{4b^2 - a^2}}}{4b^2 - a^2}$$

$$R'(b) = \frac{4b(4b^2 - a^2) - 8b^3}{2(4b^2 - a^2)\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

$$R'(b) = \frac{2b(2b^2 - a^2)}{(4b^2 - a^2)\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

$$R'(b) \leq 0 \quad si \quad b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$$
$$R'(b) \geq 0 \quad si \quad b \geq \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Il en résulte que R est minimum lorsque $b=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

b/ $AB^2+BC^2=2b^2=2(\frac{a^2}{2})=a^2=AC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

c/ la valeur minimum de R :

$$R_{min}=R(\frac{a}{\sqrt{2}})=\frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2}}$$

donc $R_{min}=\frac{a}{2}$.